 ©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Über die Bedingungen der algebraischen Theilbarkeit eines ganzen Ausdruckes von n^2 willkürlichen Elementen durch die Determinante der letzteren.

Von **F. Mertens.**

Wenn ein ganzer Ausdruck A der Elemente

$$\begin{matrix} a_1\, a_2 \ldots a_n \\ b_1\, b_2 \ \ldots b_n \\ \\ e_1\, e_2 \ \ldots e_n, \end{matrix} \tag{1}$$

welche n Zeilen und n Spalten bilden, durch die m^{te} Potenz der Determinante

$$(ab \ldots e) = \Sigma \pm a_1 b_2 \ldots e_n$$

algebraisch theilbar ist, so wird, wenn man allgemein e_i durch

$$pa_i + qb_i + \ldots + te_i$$

ersetzt, wo unter $p, q, \ldots t$ willkürliche Elemente zu verstehen sind, A durch t^m algebraisch theilbar. Diese Eigenschaft ist aber auch hinreichend, um schliessen zu können, dass A durch $(ab \ldots e)^m$ algebraisch theilbar ist.

Um dies zu beweisen, sei A zunächst homogen und zwar vom Grade k in Bezug auf $e_1, e_2 \ldots e_n$. Setzt man dann statt $e_1, e_2, \ldots e_n$ andere Elemente $e'_1, e'_2, \ldots e'_n$ und hierauf

$$p = (-1)^n (bc \ldots ee') \quad q = (-1)^{n-1} (ac \ldots ee') \ldots t = (ab \ldots e),$$

so wird nach einer bekannten Identität

$$pa_i + qb_i + \ldots + te'_i \equiv (ab \ldots e')\, e_i$$

und man hat nach der Annahme eine Identität von der Form

$$(a\,b\ldots e')^k A \equiv (a\,b\,.\ .\,e)^m P,$$

wo unter P ein ganzer Ausdruck der Elemente (1) und der Elemente $e'_1, e'_2, \ldots e'_n$ zu verstehen ist. Man setze nun

$$e'_1 = e'_2 = \ldots = e'_{n-1} = 0,\ e'_n = 1,$$

wodurch P in Q übergehen möge und bezeichne die Determinante des Elementensystems

$$\begin{matrix} a_1\,a_2\ldots a_{n-1} \\ b_1\,b_2\ldots b_{n-1} \\ \\ d_1\,d_2\ldots d_{n-1}, \end{matrix} \qquad (2)$$

welches aus (1) durch Streichung der n^{ten} Zeile und n^{ten} Spalte entspringt, mit $(a\,b\,.\ .\,d)$. Es wird dann

$$(a\,b\ldots d)^k A \equiv (a\,b\ldots e)^m Q. \qquad (3)$$

Gilt nun die obige Behauptung bereits für ein System von $n-1$ Zeilen mit je $n-1$ Elementen, wie (2), so ersetze man in der Identität (3), wenn i einen der Zeiger 1, 2, $\ldots n-1$ bezeichnet, d_i allgemein durch

$$p\,a_i + q\,b_i + \ldots + s\,d_i.$$

Es wird dann $(a\,b\ldots d)^k$ durch s^k, $(a\,b\,.\ .\,e)^m$ aber nicht durch s theilbar. Daher muss Q algebraisch durch s^k theilbar werden und mithin durch $(a\,b\,.\ .\,d)^k$ theilbar sein, woraus dann

$$A \equiv (a\,b\,.\ .\,e)^m R$$

folgt, wo R einen ganzen Ausdruck der Elemente (1) bezeichnet.

Ist A nicht homogen in Bezug auf $e_1, e_2, \ldots e_n$, so muss, wenn in A e_i durch

$$p\,a_i + q\,b_i + \ldots + t\,e_i$$

ersetzt und in Folge dessen A durch t^m theilbar wird, dasselbe mit jedem homogenen Bestandtheile von A der Fall sein; es muss also jeder dieser homogenen Bestandtheile durch $(a\,b\ldots e)^m$ algebraisch theilbar sein und mithin auch A.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Ist nun $n=2$, so ist die Identität (3) von der Form

$$a_1^k A \equiv (ab)^m Q$$

und kann nur bestehen, wenn jedes einzelne Glied von Q den Factor a_1^k enthält.

Um die Brauchbarkeit des vorstehenden Kennzeichens zu zeigen, will ich einige Anwendungen hersetzen.

I. Der Beweis der Multiplicationsregel gestaltet sich mit Hülfe des erwähnten Kennzeichens sehr einfach.

Es seien

$$\begin{matrix} a_1 a_2 \ldots a_n \\ b_1 b_2 \ldots b_n \\ \\ e_1 e_2 \ldots e_n \end{matrix} \qquad (1) \qquad \begin{matrix} \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n \\ \\ \vartheta_1 \vartheta_2 \ldots \vartheta_n \end{matrix} \qquad (2)$$

zwei Systeme von je n Zeilen mit n Elementen und zur Abkürzung

$$a_\xi \equiv a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \ldots + a_n \xi_n$$
$$b_\xi \equiv b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + \ldots + b_n \xi_n$$

Ersetzt man in der Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_\xi a_\eta \ldots a_\vartheta \\ b_\xi b_\eta \ldots b_\vartheta \\ \\ e_\xi e_\eta \ldots e_\vartheta \end{vmatrix}$$

e_i allgemein durch

$$p a_i + q b_i + \ldots + t e_i,$$

so gehen $e_\xi, e_\eta, \ldots e_\vartheta$ beziehungsweise über in

$$p a_\xi + q b_\xi + \ldots + t e_\xi$$
$$p a_\eta + q b_\eta + \ldots + t e_\eta$$

$$p a_\vartheta + q b_\vartheta + \ldots + t e_\vartheta$$

und die Determinante Δ, wenn man die erste Zeile mit $-p$, die

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

zweite mit $-q, \ldots$ multiplicirt und zu der letzten Zeile addirt, in $t\Delta$. Es muss also Δ durch die Determinante $(ab \ldots e)$ theilbar sein und wenn man

$$\Delta \equiv P(ab. \quad .e)$$

setzt, so kann P nicht mehr die Elemente (1) enthalten. Man kann daher zur Bestimmung von P $a_1 = b_2 = \ldots = e_n = 1$ und alle übrigen Elemente des Systems (1) $= 0$ setzen, wodurch Δ in $(\xi\eta \ldots \vartheta)$ und $(ab \ldots e)$ in 1 übergeht. Man hat daher

$$P \equiv (\xi\eta \ldots \vartheta)$$

und somit

$$\Delta \equiv (ab. \quad .e)\,(\xi\eta \ldots \vartheta).$$

II. Man denke sich alle Zusammenstellungen von m verschiedenen Zeigern der Reihe $1, 2 \ldots n$ gebildet und setze unter denselben eine bestimmte Reihenfolge fest. Bezeichnet man dann diejenige Unterdeterminante m^{ten} Grades

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha'} & a_{\alpha\beta'} & \ldots & a_{\alpha\varepsilon'} \\ a_{\beta\alpha'} & a_{\beta\beta'} & \ldots & a_{\beta\varepsilon'} \\ & & & \\ a_{\varepsilon\alpha'} & a_{\varepsilon\beta'} & \ldots & a_{\varepsilon\varepsilon'} \end{vmatrix}$$

der Determinante A des Elementensystems

$$\begin{matrix} a_{11}\ a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \\ a_{n1}\ a_{n2} & \ldots & a_{nn}, \end{matrix} \qquad (1)$$

in welcher die Zeiger $\alpha\beta \ldots \varepsilon$ die i^{te}, $\alpha'\beta'$ die k^{te} Zusammenstellung bilden, mit d_{ik}, so ist die Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \ldots d_{1\mu} \\ d_{21} & d_{22} \ldots d_{2\mu} \\ & \\ d_{\mu 1} & d_{\mu 2} \ldots d_{\mu\mu} \end{vmatrix},$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wo zur Abkürzung $\binom{n}{m} = \mu$ gesetzt worden ist, eine Potenz von A.[1]

Ersetzt man nämlich $\binom{n}{m}$ allgemein a_{ni} durch

$$t_1 a_{1i} + t_2 a_{2i} + \ldots + t_n a_{ni},$$

so verwandelt sich jede Determinante d_{pq}, welche die Elemente $a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{nn}$ enthält, in

$$t_n d_{pq} \pm t_\rho d_{\alpha q} \pm t_\sigma d_{\beta q} \pm \ldots$$

wo $\rho, \alpha, \sigma, \beta, .$ für jedes q dieselben bleiben und $d_{\alpha q}, d_{\beta q}, .$. die Elemente $a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{nn}$ nicht enthalten. Da man nun in der Determinante Δ irgend eine Zeile mit einem beliebigen Factor multipliciren und dann von einer anderen Zeile abziehen darf, ohne diese Determinante zu ändern, so kann man aus der p^{ten} und allen ähnlichen Zeilen die Glieder $t_\rho d_{\alpha q}, t_\sigma d_{\beta q}, \ldots$ wegbringen, worauf dann alle diese $\binom{n-1}{m-1}$ Zeilen den Factor t_n enthalten werden. Es ist daher die Determinante Δ durch $A^{\binom{n-1}{m-1}}$ theilbar. Da aber Δ in Bezug auf jede Zeile des Elementensystems (1) vom Grade $\binom{n-1}{m-1}$ ist, so kann sich Δ von $A^{\binom{n-1}{m-1}}$ nur durch einen Zahlenfactor ε unterscheiden. Um denselben zu bestimmen, setze man $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1$ und alle übrigen Elemente $= 0$; es wird dann $d_{11} = d_{22} = \ldots = d_{\mu\mu} = 1$ und alle übrigen Determinanten $d_{12}, \ldots d_{\mu-1,\mu} = 0$. Daher ist $\varepsilon = 1$ und

$$\Delta \equiv A^{\binom{n-1}{m-1}}.$$

Es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} (ab)_{12}, (ab)_{13}, (ab)_{14}, (ab)_{23}, (ab)_{24}, (ab)_{34} \\ (ac)_{12}, \ldots\ldots\ldots \\ (ad)_{12}, \ldots \\ (bc)_{12}, \\ (bd)_{12}, \ldots\ldots\ldots \\ (cd)_{12}, \ldots \end{vmatrix} = (abcd)^3$$

[1] Franke, Crelle's J. Bd. 61. Baltzer's Theorie der Determinanten. §. 76.

III. Fasst man die Determinante

$$f \equiv \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_2x_3 & x_3x_1 & x_1x_2 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_2\alpha_3 & \alpha_3\alpha_1 & \alpha_1\alpha_2 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \beta_3^2 & \beta_2\beta_3 & \beta_3\beta_1 & \beta_1\beta_2 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 & \gamma_2\gamma_3 & \gamma_3\gamma_1 & \gamma_1\gamma_2 \\ \delta_1^2 & \delta_2^2 & \delta_3^2 & \delta_2\delta_3 & \delta_3\delta_1 & \delta_1\delta_2 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_2\varepsilon_3 & \varepsilon_3\varepsilon_1 & \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{vmatrix}$$

als quadratische Form von x_1, x_2, x_3 auf, so kann die Discriminante D dieser Form in folgender Weise bestimmt werden. Man ersetze α_i durch $p\alpha_i + q\beta_i + r\gamma_i$, wodurch f in f^0 übergehen möge. Es verwandelt sich dann allgemein $\alpha_i\alpha_k$ in

$$p^2\alpha_i\alpha_k + q^2\beta_i\beta_k + r^2\gamma_i\gamma_k + qr(\beta_i\gamma_k + \gamma_i\beta_k) + \\ + rp(\gamma_i\alpha_k + \alpha_i\gamma_k) + pq(\alpha_i\beta_k + \beta_i\alpha_k)$$

und wenn man die beziehungsweise mit $-q^2$, $-r^2$ multiplicirte dritte und vierte Zeile von f^0 zur zweiten addirt, so kann man durch Zusammenfassung aller den Factor p enthaltenden Glieder f^0 in die Form $f^0 \equiv p\varphi + qr\psi$ setzen, wo

$$\psi \equiv \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_2x_3 & x_3x_1 & x_1x_2 \\ 2\beta_1\gamma_1 & & & \cdot\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2 & \cdots & \\ \beta_1^2 & & & \beta_2\beta_3 & & \\ \gamma_1^2 & & & \gamma_2\gamma_3 & & \\ \delta_1^2 & & & \delta_2\delta_3 & & \\ \varepsilon_1^2 & & & \varepsilon_2\varepsilon_3 & & \end{vmatrix}$$

ist. Es ist nun leicht zu zeigen, dass ψ in zwei lineare Factoren zerfällt; multiplicirt man nämlich die Spalten von ψ beziehungsweise mit den Coëfficienten, mit welchen x_1^2, $x_2^2 \ldots x_1x_2$ in dem Ausdrucke $(\beta\gamma x)(\delta\varepsilon x)$ behaftet sind und addirt hierauf zu der ersten Spalte alle übrigen, so ergibt sich

$$(\beta\gamma)_{23}(\delta\varepsilon)_{23}\psi \equiv \begin{vmatrix} (\beta\gamma x)(\delta\varepsilon x) & x_2^2 & \\ 0 & 2\beta_2\gamma_2 & \\ 0 & \beta_2^2 & \\ 0 & \gamma_2^2 & \\ 0 & \delta_2^2 & \cdots \\ 0 & \varepsilon_2^2 & \end{vmatrix}.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Da hiernach die Discriminante von ψ identisch verschwindet, so enthält die Discriminante von $p\varphi + qr\psi$ den Factor p. Es ist daher D durch $(\alpha\beta\gamma)$ theilbar. In derselben Weise ergibt sich, dass D durch $(\alpha\beta\delta)$, $(\alpha\beta\varepsilon)\ldots$ theilbar ist. Es kann sich daher D von dem Producte der zehn Determinanten

$$(\alpha\beta\gamma),\ (\alpha\beta\delta),\ (\alpha\beta\varepsilon),\ (\alpha\gamma\delta),\ (\alpha\gamma\varepsilon),\ (\alpha\delta\varepsilon),\ (\beta\gamma\delta),\ (\beta\gamma\varepsilon),\ (\beta\delta\varepsilon)$$
$$(\gamma\delta\varepsilon)$$

nur durch einen Zahlenfactor unterscheiden.

IV. Es seien zwei Systeme von je neun Elementen

$$\begin{matrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{matrix} \quad (1) \qquad\qquad \begin{matrix} p'_1 p'_2 p'_3 \\ q'_1 q'_2 q'_3 \\ r'_1 r'_2 r'_3 \end{matrix} \quad (2)$$

gegeben. Es sei identisch

$$\begin{matrix} (qru) \equiv u_\xi, & (rpu) \equiv u_\eta, & (pqu) \equiv u_\zeta, \\ (q'r'u) \equiv u_{\xi'}, & (r'p'u) \equiv u_{\eta'}, & (p'q'u) \equiv u_{\zeta'}, \end{matrix}$$

so, dass also $\xi_1, \xi_2, .$ nichts weiter als zur Abkürzung die Determinanten $(qr)_{23}, (qr)_{31}, \ldots$ bezeichnen, und

$$\begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \xi_2\xi_3 & \xi_3\xi_1 & \xi_1\xi_2 \\ \eta_1^2 & \eta_2^2 & \eta_3^2 & \eta_2\eta_3 & \eta_3\eta_1 & \eta_1\eta_2 \\ \zeta_1^2 & \zeta_2^2 & \zeta_3^2 & \zeta_2\zeta_3 & \zeta_3\zeta_1 & \zeta_1\zeta_2 \\ \xi'^2_1 & \xi'^2_2 & \xi'^2_3 & \xi'_2\xi'_3 & \xi'_3\xi'_1 & \xi'_1\xi'_2 \\ \eta'^2_1 & \eta'^2_2 & \eta'^2_3 & \eta'_2\eta'_3 & \eta'_3\eta'_1 & \eta'_1\eta'_2 \\ \zeta'^2_1 & \zeta'^2_2 & \zeta'^2_3 & \zeta'_2\zeta'_3 & \zeta'_3\zeta'_1 & \zeta'_1\zeta'_2 \end{vmatrix} \equiv \Phi.$$

Ersetzt man in Φ p_i durch $\lambda p_i + \mu q_i + \nu r_i$, wodurch Φ in Φ^0 übergehen möge, so verwandeln sich η_k, ζ_k in $\lambda\eta_k - \mu\xi_k$, $\lambda\zeta_k - \nu\xi_k$ und daher $\eta_i\eta_k$, $\zeta_i\zeta_k$ beziehungsweise in

$$\lambda^2\eta_i\eta_k - \lambda\mu(\eta_i\xi_k + \xi_i\eta_k) + \mu^2\xi_i\xi_k$$
$$\lambda^2\zeta_i\zeta_k - \lambda\nu(\xi_i\zeta_k + \xi_k\zeta_i) + \nu^2\xi_i\xi_k.$$

Multiplicirt man dann in Φ^0 die erste Zeile einmal mit $-\mu^2$, das andere Mal mit $-\nu^2$ und addirt dieselbe hierauf beziehungsweise zur zweiten und dritten Zeile, so ergibt sich

$$\Phi^0 \equiv \begin{vmatrix} \xi_1^2 & & & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \xi_2\xi_3 & \xi_3\xi_1 & \xi_1\xi_2 \\ \lambda^2\eta_1^2 - 2\lambda\mu\xi_1\eta_1 & & & & & & & \\ \lambda^2\zeta_1^2 - 2\lambda\nu\xi_1\zeta_1 & & & & & & & \\ \xi_1'^2 & & & & & & & \\ \eta_1'^2 & & & & & & & \\ \zeta_1'^2 & & & & & & & \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Da hiernach Φ^0 durch λ^2 theilbar ist, so muss Φ durch $(pqr)^2$ algebraisch theilbar sein. Ebenso schliesst man, dass Φ durch $(p'q'r')^2$ theilbar ist. Setzt man daher

$$\Phi \equiv (pqr)^2(p'q'r')^2\Psi,$$

so kann Ψ in Bezug auf jede Zeile der Systeme (1) und (2) nur vom zweiten Grade sein. Die Identität (3) lehrt nun noch, dass Ψ^0 sogar durch λ^3 theilbar wird, wenn man μ oder $\nu = 0$ setzt. Es muss also Ψ durch λ theilbar werden, wenn man p_i durch $\lambda p_i + \mu q_i$ oder $\lambda p_i + \nu r_i$ ersetzt, d. h. identisch verschwinden, wenn man p_1, p_2, p_3 durch q_1, q_2, q_3 oder r_1, r_2, r_3 ersetzt. Dasselbe gilt von irgend zwei Zeilen des Systems (2). Es verschwindet aber auch Ψ identisch, wenn man irgend eine Zeile des Systems (2) durch eine Zeile von (1), z. B. p'_1, p'_2, p'_3 durch p_1, p_2, p_3 ersetzt, weil dann Φ verschwindet; um sich hievon zu überzeugen, braucht man nur in Φ die Spalten mit den Coëfficienten des Ausdruckes

$$p_x[(qrr')q'_x - (qrq')r'_x$$

zu multipliciren und zur ersten Spalte die übrigen zu addiren, wodurch alle Elemente jener $= 0$ ausfallen. Es kann sich also [1] Ψ von der Determinante

$$\begin{vmatrix} p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 & p_2p_3 & p_3p_1 & p_1p_2 \\ q_1^2 & & & & & \\ r_1^2 & & & & & \\ p_1'^2 & p_2'^2 & p_3'^2 & p'_2p'_3 & p'_3p'_1 & p'_1p'_2 \\ q_1'^2 & \cdot & \cdot & & & \\ r_1'^2 & \cdot & \cdot & & & \end{vmatrix}$$

[1] Borchardt's Journal, Bd. 84, S. 355.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

nur durch einen Zahlenfactor unterscheiden, welchen man leicht $= -1$ findet.

V. Es seien $n+1$ Zeilen von je n Elementen

$$\begin{array}{l} a_1\, a_2 \ldots a_n \\ b_1\, b_2 \ldots b_n \\ \\ g_1\, g_2 \quad \cdot g_n \\ h_1\, h_2 \ldots h_n \end{array} \tag{1}$$

gegeben und es liege die Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 b_1, & a_1 c_1, & \cdot\cdot g_1 h_1 \\ a_2 b_2, & a_2 c_2, & \cdot\cdot g_2 h_2 \\ \\ a_n b_n, & a_n c_n, & \cdot\cdot g_n h_n \\ a_1 b_2 + a_2 b_1, & a_1 c_2 + a_2 c_1, & \cdot g_1 h_2 + g_2 h_1 \\ \cdot & & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1}, & a_{n-1} c_n + a_n c_{n-1}, & \ldots g_{n-1} h_n + g_n h_{n-1} \end{vmatrix}$$

zur Bestimmung vor.

Man ersetze in derselben allgemein a_i durch

$$p\, a_i + q\, b_i + \ldots + t\, g_i,$$

wodurch $a_\alpha h_\beta + a_\beta h_\alpha$ in

$$p\,(a_\alpha h_\beta + a_\beta h_\alpha) + q\,(b_\alpha h_\beta + b_\beta h_\alpha) + \ldots + t\,(g_\alpha h_\beta + g_\beta h_\alpha)$$

übergeht. Bezeichnet man nun zur Abkürzung jede Spalte der Determinante Δ mit den in derselben vorkommenden Buchstaben, also etwa die die Elemente $a_1\, a_2 \ldots a_n$ und $b_1\, b_2 \ldots b_n$ enthaltende Spalte als Spalte $a\,b$ und denkt sich die Spalten $b\,h$, $c\,h, \ldots g\,h$ beziehungsweise mit $-q$, $-r, \ldots -t$ multiplicirt und hierauf zur Spalte $a\,h$ addirt, so enthalten alle Elemente dieser letzteren den Factor p. Es muss daher Δ durch $(a\,b \ldots g)$ theilbar sein. In derselben Weise erhellt, dass Δ durch jede der $n+1$ Determinanten n^{ten} Grades des Elementensystems (1) und daher auch durch deren Product

$$P \equiv (a\,b \ldots g)\,(a\,b \ldots h) \ldots (b\,c \ldots h)$$

algebraisch theilbar ist. Da dieses Product nun in Bezug auf alle Elemente von demselben Grade $n\,(n+1)$ wie Δ ist, so hat man

$$\Delta \equiv \varepsilon P,$$

wo ε von den Elementen (1) unabhängig ist. Um ε zu bestimmen, nehme man

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = b_1 = c_2 = \ldots = h_n = 1$$

und alle übrigen Elemente $= 0$ an; es wird dann

$$\Delta = 1,\ P = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

und daher

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\Delta \equiv (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} P.$$

VI. Es ist ein Elementensystem von $n+1$ Zeilen mit je n Elementen

$$\begin{array}{l} a_1\ a_2 \ldots\ a_n \\ b_1\ b_2 \qquad\ b_n \\ \\ g_1\ g_2 \quad \cdot\ g_n \\ h_1\ h_2 \ldots\ h_n \end{array} \tag{1}$$

gegeben. Hebt man aus demselben die in irgend $n-1$ Zeilen und $n-1$ Spalten stehenden Elemente heraus, so erhält man ein System von $(n-1)^2$ Elementen, dessen Determinante mit $(a\,b)_i$ bezeichnet werde, wenn in derselben die Elemente

$$a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n, c_i, \ldots h_i$$

nicht vorkommen. Es soll die Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} (g\,h)_1^2 & (g\,h)_2^2 \cdot & (g\,h)_n^2 & (g\,h)_1 (g\,h)_2 \ldots (g\,h)_{n-1} (g\,h)_n \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ (a\,b)_1^2 & (a\,b)_2^2 \ldots (a\,b)_n^2 & (a\,b)_1 (a\,b)_2 \ldots & (a\,b)_{n-1} (a\,b)_n \end{vmatrix}$$

bestimmt werden.

Ersetzt man a_i durch

$$p\,a_i + q\,b_i + \ldots + t\,g_i,$$

wodurch Δ in Δ^0 übergehen möge, so verwandelt sich allgemein $(bh)_i$ in $p(bh)_i + q(ah)_i$ und daher $(bh)_i(bh)_k$ in

$$p^2(bh)_i(bh)_k + pq[(bh)_i(ah)_k + (bh)_k(ah)_i] + q^2(ah)_i(ah)_k.$$

Multiplicirt man dann die Zeile

$$(ah)_1^2\ (ah)_2^2 \ldots (ah)_{n-1}(ah)_n$$

von Δ^0 mit q^2 und zieht dieselbe von der Zeile

$$p^2(bh)_1^2 + 2pq(bh)_1(ah)_1 + q^2(ah)_1^2, \ldots$$

ab, so enthalten alle Elemente der letzteren den Factor p. Durch dasselbe Verfahren kann man bewirken, dass alle Elemente der Zeilen

$$(ch)_1^2\ \ (ch)_2^2$$

$$(gh)_1^2\ \ (gh)_2^2 \ldots,$$

nachdem man a_i durch $pa_i + qb_i + \ldots$ ersetzt hat, den Factor p enthalten. Es wird also Δ^0 durch p^{n-1} und daher Δ durch $(ab\ldots g)^{n-1}$ theilbar. In derselben Weise erhellt, dass Δ durch $(ab\ldots h)^{n-1} \ldots (bc\ldots h)^{n-1}$ theilbar sein muss. Es ist also, wenn man, wie oben

$$(ab\ldots g)(ab\ldots h)\ldots(bc\ldots h) \equiv P$$

setzt, Δ durch P^{n-1} algebraisch theilbar und mithin von P^{n-1} nur durch einen leicht zu bestimmenden Zahlenfactor verschieden.

Es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_1a_2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_1b_2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_1c_2 \end{vmatrix} \equiv (bc)(ca)(ab)$$

$$\begin{vmatrix} (ab)_{23}^2, & (ab)_{31}^2, & (ab)_{12}^2, & (ab)_{31}(ab)_{12}, & (ab)_{12}(ab)_{23}, & (ab)_{23}(ab)_{31} \\ (ac)_{23}^2, & & & & & \\ (ad)_{23}^2, & & & & & \\ (bc)_{23}^2, & & & & & \\ (bd)_{23}^2, & & & & & \\ (cd)_{23}^2, & & & & & \ldots. \end{vmatrix}$$

$$\equiv -(abc)^2(abd)^2(acd)^2(bcd)^2.$$